ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФИБОНАЧЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Анисимов С.Ф., студент,

Бигаева Л.А., к.ф.-м.н., доцент,

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Аннотация. В статье рассмотрено применение методаФибоначчи при решении экстремальных задач. Дано подробное описание теории чисел Фибоначчи, основные принципы метода и алгоритм его реализации, исследованы преимущества и недостатки данного метода.

Ключевые слова. Оптимальные методы, экстремальные задачи, одномерный поиск, метод Фибоначчи.

Существует множество методов нахождения оптимального решения в задачах, где требуется выбрать наилучшее значение из множества возможных вариантов.Наиболее известными методамипоиска минимума или максимума функции на отрезкеявляются методы дихотомии (деления отрезка пополам), золотого сечения и Фибоначчи [1]. В каждом из этих методов последовательно сокращается интервал, содержащий точку экстремума.

Метод Фибоначчи основан на последовательности чисел Фибоначчи, которая определяется следующим образом: каждое число последовательности равно сумме двух предыдущих чисел. Например, последовательность чисел Фибоначчи выглядит следующим образом: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 и так далее.

Метод Фибоначчи использует эти числа для определения оптимального значения в задаче оптимизации. Он работает следующим образом:

Шаг1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$,l>0-допустимая длина конечного интервала, ε>0-константа различимости.

Шаг2. Найти количество N вычислений функции как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условиечисла Фибоначчи $F_N \geq \frac{|L_0|}{l}$[1-2].

Шаг3. Положить k=0.

Шаг4. Вычислить $y_k = a_k + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k}}(b_k - a_k), z_k = a_k + \frac{F_{N-k-1}}{F_{N-k}}(b_k - a_k)$.

Шаг 5. Вычислить $f\ (y_k), f(z_k)$.

Шаг 6. Сравнить $f(y_k)$ и $f(z_k)$.

а) если $f(y_k) \leq f(z_k)$,то положить

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k, z_{k+1} = y_{k+1}\ , y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$;

затем перейти к шагу 7.

б) если $f(y_k) > f(z_k)$,то положить

$a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k, y_{k+1} = z_{k+1}, z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$;

и перейти к шагу 7.

Шаг 7. Проверить условие окончание и в случае необходимости сделать заключительное N-ое вычисление функции для получения решения:

а) если $k \neq N-3$, то положить k=k+1 и перейти к шагу 4;

б)если$k = N-3$, то всегда $y_{N-2} = z_{N-2} = \frac{(a_{N-2}+b_{N-2})}{2}$

Шаг 7(продолжение)

Следует положить $y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}; z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$

В точках y_{N-1} и z_{N-1}вычисляются значения функции и находятся границы конечного интервала неопределенности:

- если $f(y_{N-1}) \leq f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = a_{N-2}, b_{N-1} = z_{N-1}$
- если $f(y_{N-1}) > f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = y_{N-2}, b_{N-1} = b_{N-2}$

Процесс поиска завершается и $x \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку последнего интервала. Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле, $R(N) = \frac{1}{F_N}$, где N-количество вычислений функции.

На рис. 1 приведена схема поиска экстремума по методу Фибоначчи.

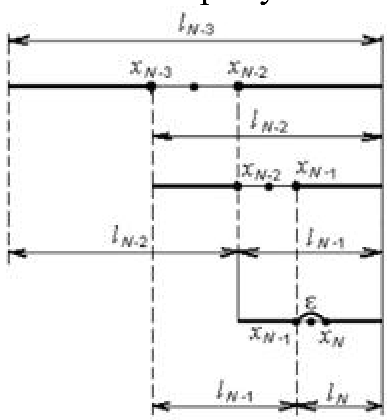

Рис. 1.Схема поиска экстремума по методу Фибоначчи.

Пример. Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом Фибоначчи.

1. Зададим начальный интервал неопределенности: $L_0 = [0{,}10]$. Пусть l=1,ε=0,01; $F_6 = 13 > \frac{|L_0|}{l} = 10$, поэтому $N = 6$.

2. Числа Фибоначчи:

$$F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13.$$

3. Положим k=0

4. Вычислим $y_0 = a_0 + \frac{F_4}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{5}{13} * 10 = 3{,}846;$

$z_0 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} * 10 = 6{,}154.$

5. Вычислим $f(y_0) = -16{,}57; f(z_0) = 1{,}893.$

6. Сравниваем $f(y_0)$ и $f(z_0)$, тогда $a_1 = a_0 = 0, b_1 = z_0 = 6{,}154; y_1 = a_1 + \frac{F_{6-3}}{F_{6-1}}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{3}{8} * 6{,}154 = 2{,}308; z_1 = y_0 = 3{,}846$

7. Проверим условие окончания$k = 0 \neq N - 3 = 6 - 3; L_2 = [0; 6{,}15]$

Положим k=1 и перейдем к шагу 5.

$a_1 = 0, b_1 = 6{,}154, y_1 = 2{,}31, z_1 = 3{,}846$

5.Вычислим $f(y_1) = -17{,}04; f(z_1) = -16{,}57$

6. Сравниваем$f(y_1)$ и $f(z_1)$,Так как $f(y_1) < f(z_1)$,то $a_2 = a_1 = 0, b_2 = z_1 = 3{,}864; y_2 = a_2 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-2}}(b_2 - a_2) = 0 + \frac{2}{5} * 3{,}864 = 1{,}538;$

$$z_2 = y_1 = 2{,}308$$

8. Проверим условие окончания$k = 1 \neq N - 3 = 3; L_2 = [0; 3{,}864]$

Положим k=2 и перейдем к шагу 5 с данными

$$a_2 = 0; b_2 = 3{,}84; y_2 = 1{,}54; z_2 = 2{,}308$$

5.Вычислим $f(y_2) = -13{,}73; f(z_2) = -17{,}04$

6. Сравним $f(y_2) > f(z_2)$,тогда$a_3 = y_2 = 1.538; b_3 = b_2 = 3{,}864; y_3 = z_2 = 2{,}308; z_3 = a_3 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-3}}(b_3 - a_3) = 1{,}538 + \frac{2}{3} * (3{,}864 - 1{,}538) = 3{,}077;$

7.Проверим условие окончания;$k = 2 \neq N - 3 = 3; L_4 = [1{,}54; 3{,}84]$

Положим k=3 и перейдем к следующему шагу. Итак, $a_3 = 1{,}54; b_3 = 3{,}86; y_3 = 2{,}31; z_3 = 3{,}08.$

5.Вычислим $f(y_3) = -17{,}04; f(z_3) = -17{,}99$

6. Сравним $f(y_3) > f(z_3)$,тогда$a_4 = y_4 = 2{,}308; b_4 = b_3 = 3{,}864; y_4 = z_3 = 3{,}077; z_4 = a_4 + \frac{F_{6-5}}{F_{6-4}}(b_4 - a_4) = 2{,}308 + \frac{1}{2} * (3{,}864 - 2{,}308) = 3{,}077;$

7. Проверим условие окончания:

$$k = 3 = N - 3 = 3; L_5 = [2{,}31; 3{,}846]$$

Тогда положим$y_5 = y_4 = z_4 = 3{,}08;$

$$z_5 = y_5 + \varepsilon = 3{,}077 + 0{,}01 = 3{,}09$$

$$f(y_5) = -17{,}98817; f(z_5) = -17{,}98486.$$

Так как $f(y_5) < f(z_5)$, то $a_5 = a_4 = 2{,}308; b_5 = z_5 = 3{,}09$

Таким образом, $\dot{x} \in L_6 = [2{,}308; 3{,}087];$

$|L_6|$=3,087-2,308=0,78<l=l. В качестве приближенного решения возьмем середину интервала L_6:$\dot{x} \cong 2{,}697$, $f(\dot{x}) = -17{,}82$. Точное минимальное значение-18при этом достигается в точке 3, т.е. минимальное значение функции f(3)= -18. Как видно, относительная погрешность приближения не превышает 1%[3].

Метод Фибоначчи обладает рядом преимуществ, которые делают его одним из наиболее эффективных методов оптимизации.

1. Гарантированное нахождение оптимального значения: Метод Фибоначчи гарантирует нахождение оптимального значения в задаче оптимизации. Это обеспечивает точность и надежность метода.
2. Минимальное количество вычислений функции цели: Метод Фибоначчи требует минимального количества вычислений функции цели, что экономит время и ресурсы. Это особенно важно в случаях, когда вычисление значений функции цели требует значительных вычислительных затрат.
3. Применимость к различным типам задач оптимизации: Метод Фибоначчи может быть применен к различным типам задач оптимизации, включая одномерную и многомерную оптимизацию. Он также может быть модифицирован для работы с ограничениями в задачах оптимизации. Это делает его универсальным инструментом для решения разнообразных задач.

Несмотря на преимущества, у метода есть также недостатки.

Например, заранее заданное число испытаний, которое нельзя менять в процессе сужения интервала неопределенности, и если после N испытаний не получена нужная точность определения оптимума, то все приходится начинать сначала, задавшись большим N. Также при применении ЭВМ необходимо запоминать (или каждый раз вычислять) числа Фибоначчи.

Метод Фибоначчи является мощным инструментом для оптимизации и позволяет находить оптимальное решение с минимальным количеством вычислений функции цели. Он обладает рядом преимуществ, таких как гарантированное нахождение оптимального значения и применимость к различным типам задач оптимизации. Метод Фибоначчи широко применяется в различных областях, где требуется нахождение оптимального решения, и является незаменимым инструментом для многих исследователей и инженеров.

Литература

1. Лемешко, Б.Ю. Методы оптимизации: Конспект лекций.– Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 126 с.
2. Воробьев, Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1964 г.
3. Бигаева, Л. А. Курс лекций по численным методам: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Л. А. Бигаева, И. И. Латыпов. – Издание правленое и дополненное. – Бирск: Бирский филиал Башкирского государственного университета, 2019. – 139 с. – ISBN 978-5-86607-476-5.